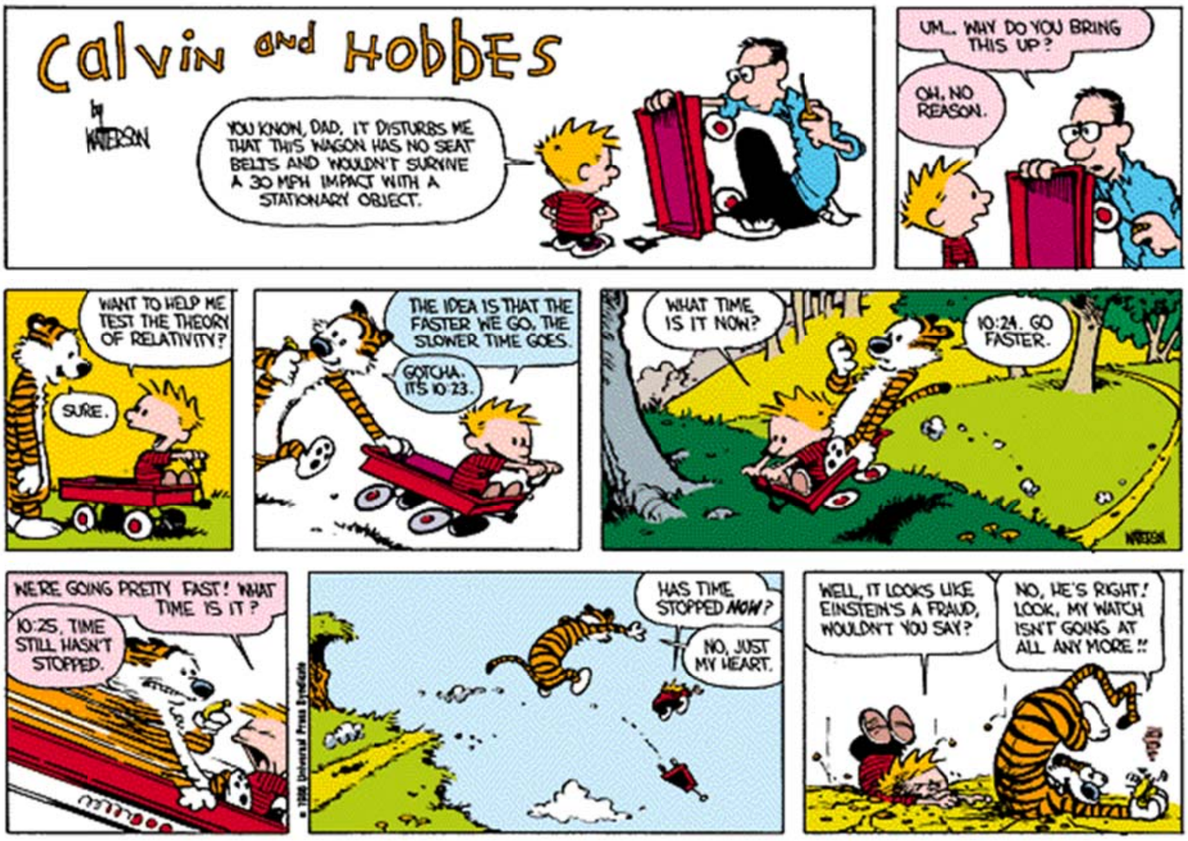
Einstein's Relativiteits theorie



Een uitleg met middelbare school wiskunde

André van der Hoeven

Docent natuurkunde

Emmauscollege - Rotterdam

Einstein's speciale relativiteitstheorie, maar dan begrijpelijk (hoop ik)…

Einstein's speciale relativiteitstheorie wordt vaak als moeilijk en onbegrijpelijk gezien. In deze les ga ik proberen jullie deze theorie uit te leggen en te laten zien wat een aantal gevolgen van deze theorie zijn. Met de stof die je op de middelbare school in 4V hebt gehad kun je deze theorie namelijk al afleiden en zelfs voor een groot deel begrijpen.

Voordat we echter aan de relativiteitstheorie beginnen is er een basisbegrip dat we eerst moeten begrijpen waar je waarschijnlijk nog nooit van gehoord hebt.

Inertiaalstelsels

Het gaat om het begrip **inertiaalstelsel** . *Een inertiaalstelsel is een assenstelsel waarin voorwerpen, waar geen kracht op werkt, rechtlijnig bewegen (of stilstaan). Er is dus geen versnellingvan het stelsel zelf aan de gang!* (Vaak doen we alsof wij ook in een inertiaalstelsel zitten, maar aangezien we op de aarde ronddraaien is dat niet helemaal waar. Er moet dan namelijk een versnelling zijn. Bij benadering kunnen we dat echter wel aannemen…).

Een inertiaalstelsel beweegt dus met een constante snelheid t.o.v. elk ander inertiaalstelsel.

Even een voorbeeld. Je gooit een bal omhoog. Dan gaat die bal recht naar boven en terug naar beneden (fig 1a). Nu ga je in een vliegtuig mee dat met 1000 km/h vliegt en je gooit de bal weer omhoog. Ook dan zie je de bal recht omhoog gaan en weer naar beneden vallen, omdat je zelf in hetzelfde stelsel als de bal zit.

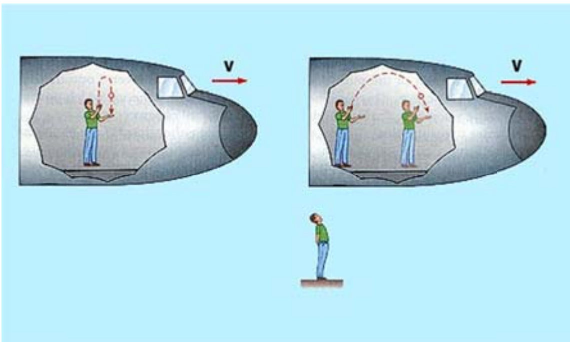


Fig 1a Fig 1b

Je kunt dus niet zien of je beweegt als je zelf in het in hetzelfde stelsel zit (pas als je uit het vliegtuig kijkt, en je ziet het inertiaalstelsel van de aarde dan zie je dat ten opzichte van de aarde beweegt, of de aarde ten opzichte van jou)!

Ga je echter buiten het vliegtuig staan dan lijkt de bal een boog te beschrijven. Dus door van buiten naar een inertiaalstelsel te kijken kun je wel zien dat er relatieve beweging is! (fig 1b)

Denk aan als je in een trein zit die wegrijdt en je kijkt naar de trein naast je, welke trein rijdt dan? Dat zie je in eerste instantie niet.

Conclusie: Je kunt snelheid pas waarnemen als je ten opzichte van iets anders beweegt. De snelheid van een inertiaalstelsel is alleen relatief te bepalen, maar nooit absoluut, want je weet nooit wat stil staat.

Newton had dit al goed door en postuleerde dat de natuurwetten in alle inertiaalstelsels gelijk moeten zijn. Als in het ene stelsel geldt dat $F = m \times a$, dan moet het ook in een willekeurig ander stelsel gelden, *je weet immers niet wat de snelheid van het stelsel is en je kunt dus hier ook geen rekening mee houden*.

Dit blijkt ook te kloppen, want als je kijkt naar $F = m \times a$, dan zie je dat:

m is in beide stelsels gelijk

$a = \Delta v/\Delta t$, en aangezien de Δv en de Δt onafhankelijk zijn van met welke snelheid je begint is *a* ook gelijk

Dus de formule geldt in beide stelsels precies hetzelfde. Je kunt bewijzen dat dit voor alle natuurwetten moet gelden, maar dat zullen we nu niet doen.

De wetten van Maxwell

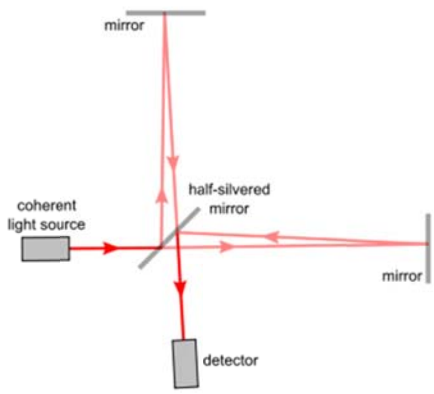
Tot aan het eind van de 19^e eeuw was dit algemeen aanvaard en waren er geen problemen, totdat Maxwell zijn wetten voor elektromagnetisme opstelde.

In de wetten van Maxwell kwam de snelheid van het licht voor (c = 299 792 458 m/s, we ronden dit voor het gemak af op $3{,}0 \times 10^8$ m/s). De vraag die zich gelijk voordeed ten opzichte van welk stelsel moet je deze snelheid dan nemen? Stel dat je zelf beweegt met $1{,}0 \times 10^8$ m/s, is dan de lichtsnelheid nog maar $2{,}0 \times 10^8$ m/s of juist $4{,}0 \times 10^8$ m/s?

Dan zouden de wetten van Maxwell dus afhankelijk zijn van je eigen snelheid, en dus niet meer gelden in alle stelsels. Dat was een serieus probleem dat in strijd was met het postulaat van Newton.

Als oplossing bedacht men de 'ether' die de ruimte tussen de sterren en de planeten zou vullen. De snelheid was dan altijd ten opzichte van deze ether die snelheid 0 zou hebben. Maar om dan te kunnen corrigeren voor de eigen snelheid moest de snelheid van de aarde ten opzichte van de ether bepaald worden!

Experiment van Michelson en Morley



Als de eigen snelheid een verandering van de snelheid van het licht tot gevolg had moest dit te meten zijn. Zeker als je kijkt naar de beweging van de aarde rond de zon, die toch wel zo'n 30 km/s is. Dat is 1/10000 deel van de lichtsnelheid en dat is met nauwkeurige apparatuur meetbaar. Michelson en Morley verzonnen een experiment waarbij een monochromatische (één golflengte, in fase) lichtbundel door een halfdoorlatende spiegel werd gestuurd. De lichtbundel werd in twee stralen gesplitst die loodrecht op elkaar stonden. Na een weerkaatsing kwamen ze weer samen en interfereerden. Als er een verschil in snelheid in de twee richtingen was dan kon dit uit het interferentiepatroon bepaald worden. Ondanks alle pogingen die ze deden zagen ze nergens een verschil in de metingen. Dit kon maar tot één conclusie leiden, de lichtsnelheid was in alle richtingen gelijk, en dus altijd hetzelfde, ongeacht je eigen snelheid.

Einstein

Einstein vatte dit samen in zijn speciale relativiteitstheorie als volgt:

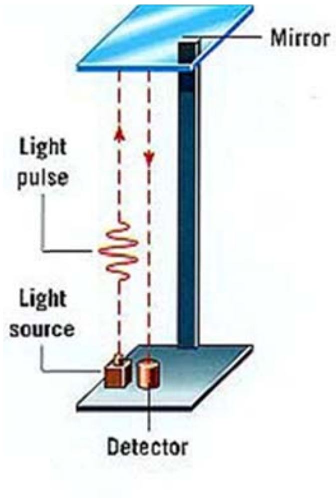
1) Alle natuurwetten gelden in alle inertiaalstelsels

2) Licht heeft altijd dezelfde lichtsnelheid in vacuüm ongeacht de snelheid van de waarnemer

Dit heeft echter vergaande gevolgen.

We hebben tot nog toe altijd geleerd dat $v = s/t$. Als v_{licht} constant is, ongeacht je eigen snelheid, kan dat alleen maar betekenen dat er iets aan de hand moet zijn met de afstand en de tijd. Deze moeten dus veranderen als je snelheid verandert, om te zorgen dat v_{licht} voor de waarnemer gelijk blijft.

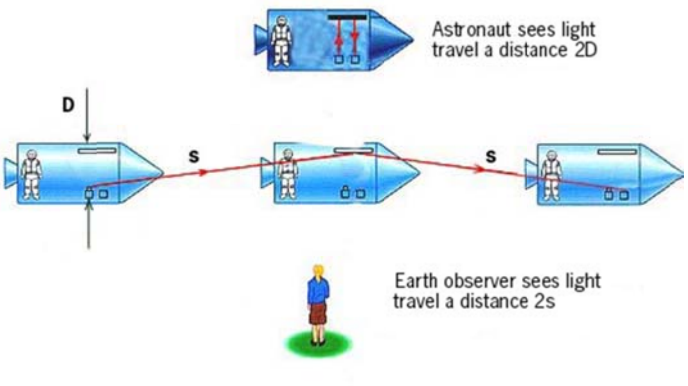
Hoe kan dat?



Daarvoor doen we een gedachtenexperiment, dat Einstein ook deed:

Stel je neemt een lichtklok. Dat is een lichtbron die een lichtpuls weg stuurt naar een spiegel en een detector die de terugkaatsende lichtpuls meet. Als je de afstand precies weet kun je dit als klok gebruiken omdat de tijd altijd gelijk zal zijn. In ons voorbeeld zetten we de spiegels op 15 cm afstand van elkaar. Dan doet een lichtpuls hier precies 1 ns (1×10^{-9} s) over.

Dit is op zich niet zo vreemd en denk ik goed voor te stellen. Stel nu dat je de klok in een langsvliegende raket zet die met een snelheid v voorbijkomt.



De astronaut aan boord ziet de lichtpuls nog steeds op en neer gaan en meet dus een tijd van 1ns.

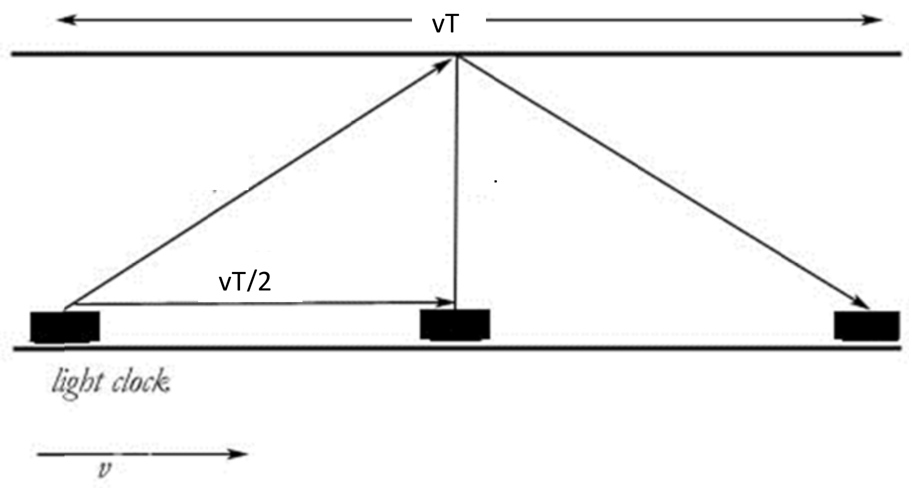
De waarnemer die op aarde staat ziet echter de lichtbundel een veel langere weg afleggen. Omdat per definitie de lichtsnelheid altijd hetzelfde moet zijn, kan dat alleen maar als de klok van de persoon op aarde een langere tijd aangeeft dan de klok van de astronaut, immers $c = s/t$, als s langer is en c gelijk, dan moet t langer zijn. De vraag is nu wat is het verschil tussen de klok van de astronaut en de klok van de persoon op aarde?

Dit is met simpele geometrie af te leiden, en dat zullen we nu gaan doen.

Tijddilatatie (uitrekking van de tijd)

We maken voor de duidelijkheid even een afspraak over hoe we dingen noteren. Voor de **bewegende** waarnemer gebruiken we kleine letters voor *s* en *t*, voor de **stilstaande** waarnemer gebruiken we *S* en *T* voor de afstand en tijd om verwarring te voorkomen.

Stel we zetten de lichtklok in een raket die met een snelheid *v* vliegt.



De waarnemer op de grond ziet de lichtstraal dus schuin omhoog gaan en dan weer terugkomen op een spiegel na een bepaalde tijd *T*. De afstand die de spiegel dan heeft afgelegd is *vT*.

In bovenstaande figuur zie je met behulp van Pythagoras dat het volgende verband voor de afgelegde afstand tot de eerste spiegel moet gelden:

$$S^2 = L^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2$$

Omdat de totale afstand 2x deze afstand is geldt dus:

$$2S = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2}$$

Volgens Einstein moet gelden dat *c = 2S/T* (want c is constant, dus geldt ook hier!), dus:

$$cT = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2}$$

Maar omdat de afstand *L* in beide systemen gelijk is en de bewegende waarnemer alleen de lichtstraal op en neer ziet gaan geldt:

$$c = \frac{2L}{t} \text{ oftewel } L = \frac{ct}{2}$$

Dit kun je invullen in de bovenstaande vergelijking, we vervangen dus *L*:

$$cT = 2\sqrt{\left(\frac{ct}{2}\right)^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2}$$

Kwadrateren geeft:

$$(cT)^2 = 4\left(\left(\frac{ct}{2}\right)^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2\right)$$

De 4 kunnen we wegstrepen tegen de gedeeld door 2^2, dus:

$$(cT)^2 = (ct)^2 + (vT)^2$$

We brengen de *T* naar de éne en de *t* naar de andere kant:

$$(cT)^2 - (vT)^2 = (ct)^2 \rightarrow c^2T^2 - v^2T^2 = c^2t^2$$

Alles delen door c^2 geeft:

$$T^2 - \frac{v^2}{c^2}T^2 = t^2$$

Dit leidt tot:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)T^2 = t^2 \rightarrow T^2 = \frac{t^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Dit geeft de uiteindelijk formule van Einstein voor de zogenaamde tijddilatatie:

$$T = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In deze formule zie je de tijd *T* voor een waarnemer op de grond en de tijd *t* voor iemand die beweegt. Je kunt in deze formule zien dat de tijd t voor de bewegende waarnemer langzamer gaat dan de tijd T van de stilstaande waarnemer, kijk maar:

Stel *v = 0,8c* en de tijd op de grond is *T = 1,0* s, dit vullen we in:

$$t = 1{,}0 \times \sqrt{1 - \frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} \rightarrow t = 1{,}0 \times \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6\ s$$

Als je dus vliegt met 0,8x de lichtsnelheid duurt 1,0 s voor een externe waarnemer op jouw klok maar 0,6 s. Voor je zelf (jij zit in hetzelfde systeem als de klok) is er gewoon 1,0 s verlopen.

Bij 0,9*c* is dewaargenomen tijd nog maar 0,44 s, bij 0,99*c* nog maar 0,14 s totdat bij de lichtsnelheid zelf de tijd voor de externe waarnemer tot stilstand komt!

Lengtecontractie (korter worden van de lengte)

Voor de bewegende waarnemer geldt het volgende:

$$c = \frac{s}{t}$$

En voor de stilstaande waarnemer geldt:

$$c = \frac{S}{T}$$

Aangezien bij allebei c gelijk moet zijn geldt dus:

$$\frac{s}{t} = \frac{S}{T}$$

Aangezien $t \neq T$ moet ook gelden dat $s \neq S$, blijkbaar verandert ook de lengte die waargenomen wordt:

$$s = S \times \frac{t}{T} = S\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

De stilstaande waarnemer ziet dus alles korter in de bewegingsrichting (niet loodrecht erop!) van de bewegende waarnemer, en ook andersom, dit noemt men de **Lorentzcontractie**. Dat het ook andersom geldt komt doordat je niet weet welk voorwerp beweegt en welk voorwerp stil staat.

Contractie en tijddilatatie bij muonen

Muonen zijn deeltjes die ontstaan bij botsingen van kosmische straling op deeltjes in onze atmosfeer op zo'n 10 km hoogte. Dit zijn instabiele deeltjes met een $t_{1/2}$ = 2,2 x 10^{-6} s. Deze deeltjes hebben een snelheid van zo'n 0,998c.

Dit betekent dat de helft van de muonen niet verder komt dan 2,2 x 10^{-6} x 3,0 x 10^{8} = 660 m. Een kwart komt niet verder dan 1320 meter enz. Dat betekent dat op het aardoppervlak nauwelijks muonen zouden moeten worden waargenomen. In de praktijk zijn deze echter heel goed op het aardoppervlak waar te nemen in veel grotere hoeveelheden dan je zou verwachten!

Hoe komt dat? Door de grote snelheid van de muonen is de relativiteitstheorie hier van groot belang. De $t_{1/2}$ van het muon geldt in het inertiaalsysteem van het muon, het is een deeltjeseigenschap. Dat betekent dat een waarnemer op de grond een andere $t_{1/2}$ waar zal nemen, namelijk:

$$T = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0{,}998^2}} = 5{,}5 \times 10^{-4} s$$

Dit is dus 16x zo lang! Dat betekent dat het muon in ons inertiaalsysteem dus ook 16x zo ver kan komen, namelijk 16 x 660 = 10,5 km. Dat is ver genoeg om waar te nemen op aarde.

Andersom kun je ook kijken naar de contractie die het deeltje zelf waarneemt. Dan zul je zien dat voor het deeltje de 10,5 km naar het aardoppervlak maar 660 m lang lijkt te zijn.

Paradoxen

Hier volgt een tweetal paradoxen die de relativiteitstheorie lijken tegen te spreken:

Stel je hebt een trein van 500 m lang. Past die compleet in een tunnel van 200 m lang?

Ja, als hij maar hard genoeg zou gaan… Door de contractie zou hij dan helemaal in de tunnel passen (de snelheid moet dan 0,92c zijn, reken maar na) gezien vanaf buiten de tunnel. Voor de persoon in de trein zelf is echter de tunnel juist korter geworden en past hij er dus niet in! Dit komt doordat de voor en de achterkant voor de persoon in de trein niet meer gelijktijdig in de tunnel zijn doordat hij in een ander tijdskader zit dan de waarnemer buiten de tunnel…. Vreemd toch?

De tweelingparadox

Een bekend verhaal is de zogenaamde tweelingparadox.

Stel je hebt een tweeling. De éne helft van de tweeling wordt astronaut en meldt zich aan voor een missie naar Alpha Centauri (de dichtstbijzijnde ster op 4 lichtjaar van de aarde). Hij vliegt met een raket met 0,8c daarnaartoe, terwijl zijn andere broer op aarde blijft. Hij doet hier dus 5 jaar over (4/0,8). Eénmaal aangekomen keert hij om en vliegt met dezelfde snelheid terug. Tien jaar na vertrek komt hij dus op aarde aan. Omdat hij zelf met 0,8c vloog ging zijn klok 0,6x zo langzaam (zie eerder), dus zijn er voor hem 6 jaar verstreken, en dus ook voor alle processen in zijn lichaam. Hij is dus nu vier jaar jonger dan zijn tweelingbroer.

Maar als je nu kijkt vanuit de vertrekkende astronaut dan kun je ook zeggen dat hij stil staat (er is geen absolute snelheid) en dat de broer op aarde met 0,8c wegvliegt. Dus dan zou die broer 4 jaar jonger moeten zijn…

Zoals je ziet kan dit natuurlijk niet waar zijn. We moeten ergens een denkfout gemaakt hebben…

Het probleem zit hem erin dat hier geen sprake is van inertiaalstelsels. De broer die wegvliegt met de raket moet versnellen naar 0,8c. Eenmaal aangekomen moet hij afremmen en omkeren en weer versnellen. De broer die op aarde blijft versnelt en vertraagt echter niet (anders zou het hele heelal moeten versnellen en vertragen, want daar zit hij in…). De speciale relativiteitstheorie is hier dus niet zo simpel toepasbaar!

Sneller dan het licht?

Eén van de vragen die bij je op kan komen is natuurlijk wat als ik nu zelf met 0,8c vlieg en ik vuur een kogel af met een snelheid van 0,8c? Gaat die kogel dan sneller dan het licht? Dat kan toch niet?

Het blijkt dat voor het optellen van snelheden je eigenlijk gebruik moet maken van een iets complexere formule dan we tot nog toe altijd geleerd hebben, namelijk:

$$v_w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Waarin u en v de op te tellen snelheden zijn en v_w de snelheid is die je dan als externe waarnemer ziet. Als je met kleine snelheden werkt ($v \ll c$) dan valt de term uv/c^2 weg en staat hier gewoon:

$$v_w = u + v$$

Pas bij hoge snelheden ga je het verschil merken [1)].

Stel dat je nu de twee snelheden van 0,8c op gaat tellen, dan krijg je het volgende:

$$v_w = \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1+\frac{0{,}8c \times 0{,}8c}{c^2}} = \frac{1{,}6c}{1+0{,}64} = 0{,}98c$$

Dit is nog steeds kleiner dan de lichtsnelheid. Je kunt bewijzen dat c zo nooit groter dan 1 kan worden, en zelfs nooit precies 1 kan worden…

1) Bij twee snelheden van 0,1c is het verschil nog maar 0,1%, en dat is al ver boven de snelheden die voor ons bereikbaar zijn!